Pýthagorejská tvrzení

Jindřich Bečvář

Fakulta dopravní ČVUT

Praha, 22. září 2022

becvajin@fd.cvut.cz
becvar@karlin.mff.cuni.cz

Úvod

- **Poděkování**
- **Přednáška bude charakteru**
  - matematického,
  - metodického a didaktického,
  - s historickými poznámkami.
- **Cíl.** Měla by
  - poučit,
  - inspirovat,
  - snad i trochu pobavit.
- **Je určena** pro posluchače od 10 do 100 let.

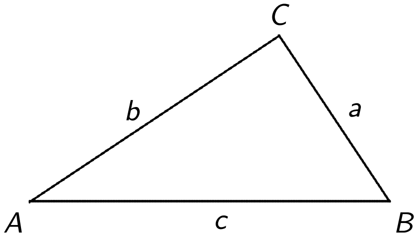
- Další doplňky, zajímavosti, poznámky, komentáře, literatura, odkazy na webové stránky atd.
  – viz **Apendix** v závěru této prezentace

- Prezentace bude vystavena na webové stránce této konference.

- Některé pasáže z přednášky mohou být použity jak ve výuce, tak ve výběrové výuce, zájmových kroužcích apod.
  Je to na vás.

- A nyní **HURRRÁÁÁ** ke korytu věci! Jak říkáme my, vzdělanci.

Pýthagorova věta



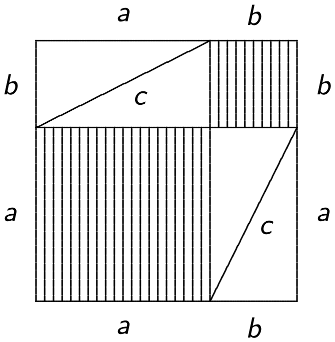
Pro délky stran $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ *trojúhelníku* ABC *s pravým úhlem při vrcholu* C *platí rovnost*

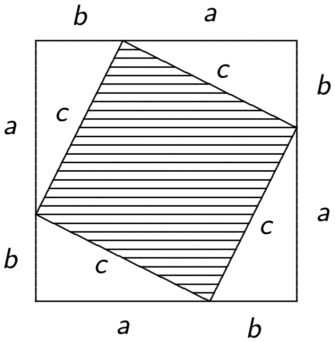
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Přesněji. *Rovnost* $a^2 + b^2 = c^2$ *platí právě tehdy, když je úhel při vrcholu* C *pravý.*

- Pýthagorás (6. stol. př. Kr.): formulace věty, důkaz (jaký?)
  - Legendy o Pýthagorově objevu – 100 volů.
  - Řekové jistě v 6. stol. př. Kr. větu i důkaz znali.
  - Eukleides uvedl Pýthagorovu větu s důkazem kolem roku 300 př. Kr. ve svých *Základech* (*Stoicheia*, *Elementa*).
- **Ale:** v Mezopotámii znali a užívali Pýthagorovu větu již v 18. století př. Kr. Viz úlohy na hliněných tabulkách.
- **Ale:** ve staré Číně znali a užívali Pýthagorovu větu již v **?**. století př. Kr. Určitě dříve než Pýthagorás.
  - Existuje kniha (knihovna KFF, Karlín) F.J. Swetz: *Was Pythagoras Chinese?* (1977).
- Snad se ještě na základních školách Pýthagorova věta učí. ???
- Bude se učit i po 50% redukci učiva, při všestranné inkluzi, a když se do školy bude chodit až od devíti hodin ???

Důkaz školský





$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} ab$$

- **Didaktická chvilka:**

I. Platnost vzorce $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ dokažte ve škole dvěma způsoby:

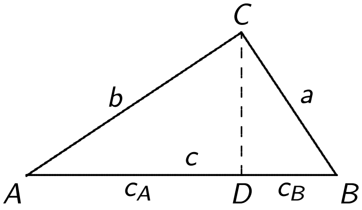
– algebraicky: roznásobením $(a+b)(a+b) = \dots$

– geometricky: výše uvedeným obrázkem

Propojení algebraického a geometrického vnímání/chápání je mimořádně důležité.

Druhý důkaz školský

Spustíme výšku a dostaneme tři podobné trojúhelníky:

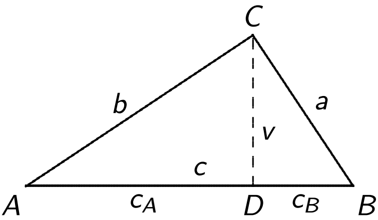


Z podobnosti trojúhelníků ABC, CBD a ACD:

$$\frac{a}{c} = \frac{c_B}{a}, \qquad \frac{b}{c} = \frac{c_A}{b}, \qquad \text{a tedy} \qquad a^2 = c \cdot c_B, \quad b^2 = c \cdot c_A.$$

Dokázali jsme **Eukleidovu větu o odvěsně**. Sečtením dokončíme důkaz **Pýthagorovy věty**:

$$a^2 + b^2 = c \cdot (c_B + c_A) = c^2.$$



Z podobnosti trojúhelníků CBD a ACD je

$$\frac{v}{c_B} = \frac{c_A}{v}, \qquad \text{a tedy} \qquad v^2 = c_B \cdot c_A.$$

Dokázali jsme **Eukleidovu větu o výšce**.

- **Dvě didaktické chvilky:**

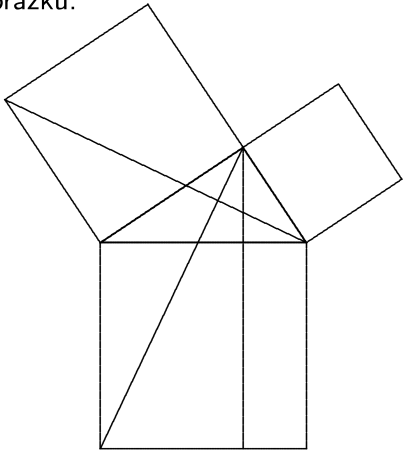
  II. Pojem *podobnosti* procvičte ve škole i na těchto důkazech, kterým můžete říkat *odvození* (pokud nechcete studenty strašit slovem *důkaz*)!

  III. Tvrzení předchozích vět můžeme chápat
  – jednak jako vztahy **mezi délkami** úseček,
  – jednak jako vztahy **mezi obsahy** příslušných čtverců a obdélníků!

  Do jisté míry tomu odpovídají i oba školské důkazy.

Eukleidův důkaz

Je založen na tomto obrázku:



- **Další didaktická chvilka:**

IV. Pokuste se Eukleidův důkaz provést. Osnova:

– Dva vyznačené trojúhelníky jsou shodné.

– Obsah každého je roven polovině obsahu čtverce nad odvěsnou,
resp. polovině obsahu obdélníka, který je částí čtverce nad (pod) přeponou.

– Proto je obsah čtverce nad odvěsnou roven obsahu obdélníku, který je částí čtverce nad přeponou.

- **Odstrašující příklad z jedné učebnice:**

  Definice Pythagorovy věty: …

  Autorka učebnice (ze Slovenska) nepochopila, co je definice a co je věta!!! A že se věta nedefinuje.

  Co k tomu říci?

- **Odstrašující příklad z jedné učebnice:**

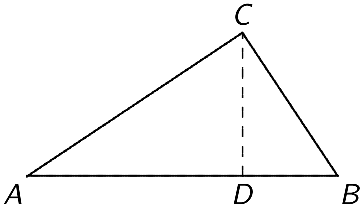
  Definice Pythagorovy věty: …

  Autorka učebnice (ze Slovenska) nepochopila, co je definice a co je věta!!! A že se věta nedefinuje.

  Co k tomu říci?

  Hrůůůůůůůůůůůůůůůůůůůůůůůůůůůůůza!!!

„Bolzanův“ důkaz



$$\frac{P_{ACD}}{AC^2} = \frac{P_{CBD}}{BC^2} = \frac{P_{ABC}}{AB^2} \implies \frac{P_{ACD} + P_{CBD}}{AC^2 + BC^2} = \frac{P_{ABC}}{AB^2}$$

$$AC^2 + BC^2 = AB^2$$

- Bernard Bolzano (1781–1848), rukopisy ?
- Étienne Bézout (1730–1783), 1768

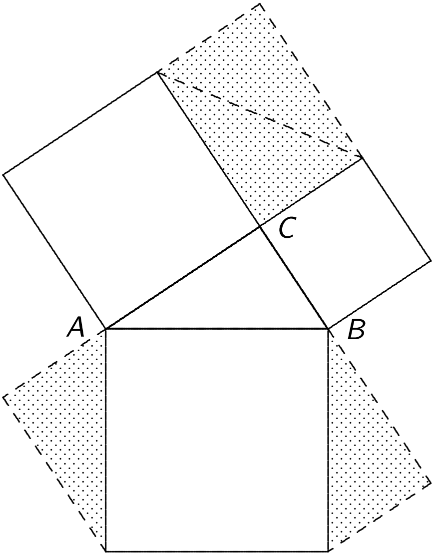
Skládanky

- Pro pobavení, ale i pro rozvoj matematického myšlení mohou posloužit nejrůznější skládanky.
  Jsou velmi užitečné, navíc pobaví.

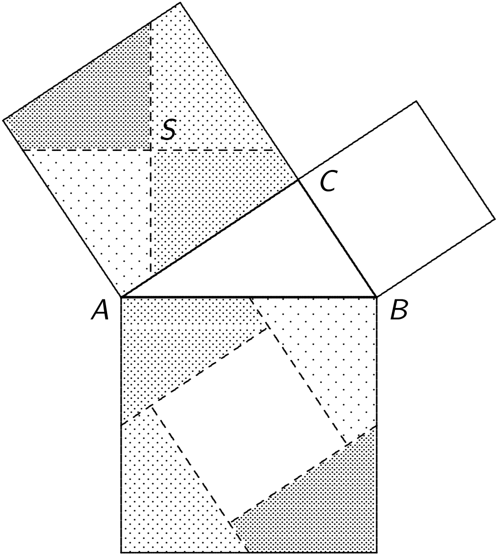
- **Další didaktická chvilka:**

  V. Skládanky nestačí ověřit vystřihnutím z papíru a přeskládáním dílů!
  Skládánky je třeba podrobit exaktnímu matematickému zkoumání.

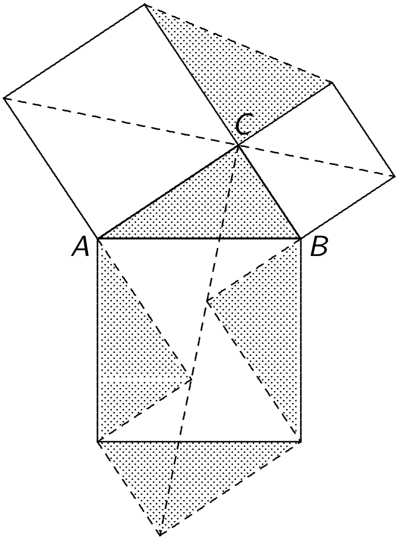
- Stará Čína:



- Stará Čína:



- Leonardo da Vinci:



Kosinová věta

V trojúhelníku ABC s vnitřním úhlem γ u vrcholu C platí rovnost

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Pozn. Dobře víme, že Kosinová věta je „**mnohem obecnější**“ než věta Pýthagorova. Je s ní však **ekvivalentní!**

– Z Kosinové věty triviálně plyne věta Pýthagorova ($\cos\gamma = 0$).

– Z Pýthagorovy věty snadno vyplývá věta Kosinová.

Důsledek. Rovnost $c^2 = a^2 + b^2$ platí **právě tehdy**, je-li úhel při vrcholu C pravý. Je-li ostrý, pak ..., je-li tupý, pak ...

- **Kozinova věta**

- **Didaktická chvilka:**

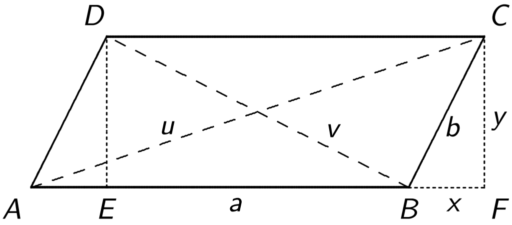
  VI. Dokažte Kosinovou větu pomocí věty Pýthagorovy! Prokážete tak logickou ekvivalenci Pýthagorovy věty a Kosinové věty. (Viz Apendix.)

Věta o rovnoběžníku

Nechť ABCD je rovnoběžník o stranách a, b *a úhlopříčkách* u, v*:*
Potom je $2a^2 + 2b^2 = u^2 + v^2$.

Důkaz. Je $u^2 = (a+x)^2 + y^2$, $v^2 = (a-x)^2 + y^2$,

tedy $u^2 + v^2 = 2a^2 + 2\left(x^2 + y^2\right) = 2a^2 + 2b^2$.



Pozn. Věta o rovnoběžníku je **ekvivalentní** s Pýthagorovou větou.

Chvilka poezie

Když jsem kráčel na agoru
zahlédl jsem Pýthagoru.
Těžce vlekl na ramenou
velký čtverec nad přeponou.

Čtverce spjaté s odvěsnami
postrádáme, nejsou k mání.
Přinese je Eukleidés
možná zítra, možná dnes.

Eukleidés a Pýthagorás
chybí nám již předlouhý čas.
Jejich věty, dámy, páni,
zůstávají zatím s námi.

Co přinesou další roky?

Nové vzdělávací kroky.

Co přinesou další roky?
Nové vzdělávací kroky.
Mohou nastat velká zvěrstva
pod taktovkou ministerstva.

Co přinesou další roky?
Nové vzdělávací kroky.
Mohou nastat velká zvěrstva
pod taktovkou ministerstva.

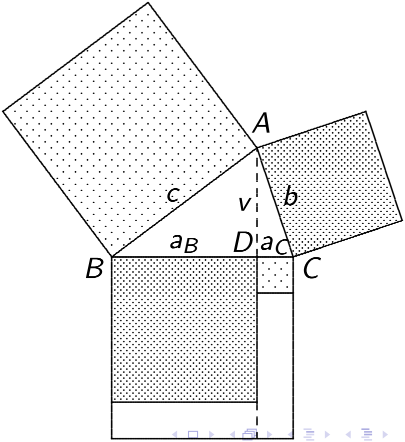
Naše milé, slavné věty,
pročpak se tak klepete?

Co přinesou další roky?
Nové vzdělávací kroky.
Mohou nastat velká zvěrstva
pod taktovkou ministerstva.

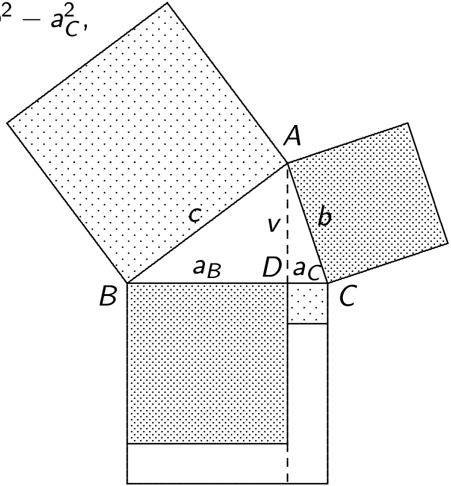
Naše milé, slavné věty,
pročpak se tak klepete?
Bojíme se! Zítra možná
zařízne nás RVP.

„Obecná“ Pýthagorova věta

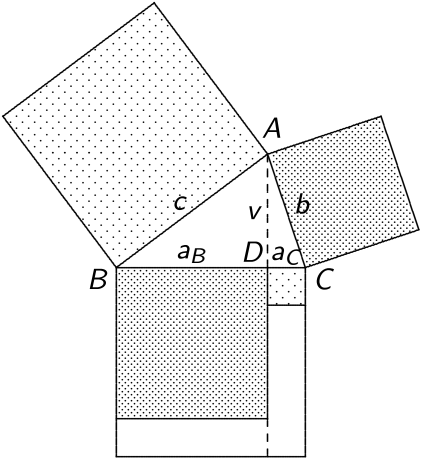
Nechť ABC *je obecný trojúhelník,* $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|CA| = b$, D *je pata výšky spuštěné z bodu* A, $|BD| = a_B$, $|CD| = a_C$, *potom je* $c^2 + a_C^2 = b^2 + a_B^2$.



Důkaz. $c^2 = a_B^2 + v^2 = a_B^2 + b^2 - a_C^2$,
tedy $c^2 + a_C^2 = b^2 + a_B^2$.



Přičteme-li k oběma stranám $a_B \cdot a_C$,
dostaneme rovnost $c^2 + a \cdot a_C = b^2 + a \cdot a_B$.



Pozn. Pokud by byl úhel *BCA* tupý, změní se důkaz jen nepatrně.

Pozn. Pokud body *C* a *D* splynou, dostaneme Pýthagorovu větu.

Máme tedy třetí **ekvivalentní tvrzení** s Pýthagorovou větou.

- **Didaktické chvilky:**

VII. Jako cvičení na Pýthagorovu větu nechte studenty
– dokázat Kosinovou větu,
– dokázat Větu o rovnoběžníku,
– dokázat Obecnou Pýthagorovu větu.

VIII. Pýthagorova věta pro obecný trojúhelník bude pro studenty patrně velmi překvapivá.

Přitom je její důkaz pouze elementárním cvičením na klasickou Pýthagorovu větu.

Překvapivé bude patrně i to, že obecné tvrzení může být ekvivalentní se svým speciálním důsledkem.

Studenti mohou jednoduchými postupy „objevovat matematiku“ (tvrzení, která v učebnicích nejsou; důkazy!).

- **Historická poznámka:**

  V české učebnici *Základowé Měřictwj čili Geometrye* (1822) Josefa Vojtěcha Sedláčka (1785–1836) je rovnost (při výše uvedeném označení)

$$\frac{c-b}{a_B-a_C}=\frac{a}{c+b},$$

  odkud plyne rovnost

$$c^2+a\cdot a_C=b^2+a\cdot a_B.$$

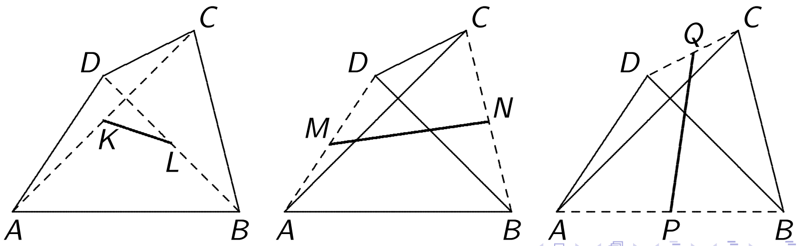
  To je Pýthagorova věta pro obecný trojúhelník (viz výše).

Pýthagorova věta pro čtyřúhelník

Nechť ABCD je čtyřúhelník, K střed úsečky AC a L střed úsečky BD. Potom je

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = |AC|^2 + |BD|^2 + 4|KL|^2.$$

Obecněji. *Nechť A, B, C, D jsou čtyři body v rovině. ...*



Důkaz lze snadno provést pomocí analytické geometrie.

Pozn. Užijeme-li větu pro obdélník $ABCD$, dostaneme klasickou Pýthagorovu větu.

Pozn. Máme další tvrzení, které je ekvivalentní s Pýthagorovou větou.

- **Didaktické chvilky:**

IX. Uvědomte si, že důkaz Věty o čtyřúhelníku (v rovině) lze chápat jako geometrickou interpretaci rovnosti týkající se komplexních čísel α, β, γ, δ:

$$(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})+(\beta-\gamma)(\overline{\beta}-\overline{\gamma})+(\gamma-\delta)(\overline{\gamma}-\overline{\delta})+(\delta-\alpha)(\overline{\delta}-\overline{\alpha}) =$$

$$= (\alpha-\gamma)(\overline{\alpha}-\overline{\gamma})+(\beta-\delta)(\overline{\beta}-\overline{\delta})+(\alpha-\beta+\gamma-\delta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta}+\overline{\gamma}-\overline{\delta}).$$

X. Dokažte Větu o čtyřúhelníku pomocí analytické geometrie.

Při důkazu si uvědomte, že nezávisí na tom,

– zda body leží v rovině,

– o kolik souřadnic se jedná.

Pýthagorova věta pro čtyři body v eukleidovském prostoru.

Nechť A, B, C, D jsou čtyři body v konečně dimenzionálním eukleidovském prostoru a K, L jsou středy úseček AC a BD. Potom je

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = |AC|^2 + |BD|^2 + 4|KL|^2.$$

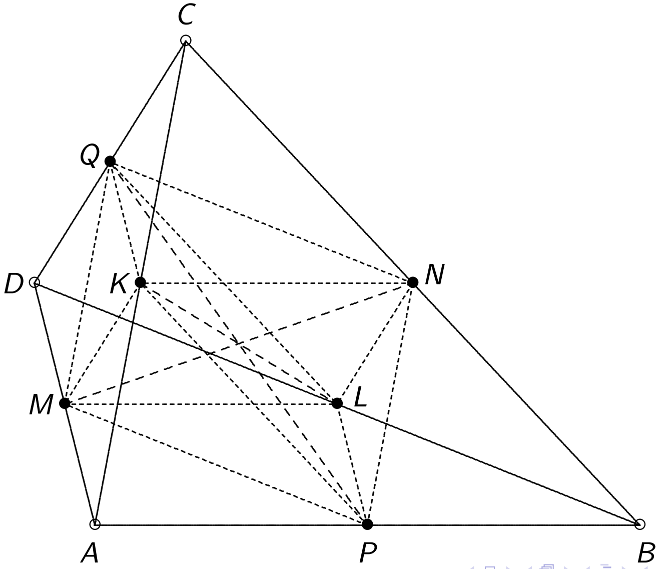
Rovněž je

$$|AB|^2 + |BD|^2 + |CD|^2 + |AC|^2 = |BC|^2 + |AD|^2 + 4|MN|^2,$$

$$|AC|^2 + |BC|^2 + |BD|^2 + |AD|^2 = |AB|^2 + |CD|^2 + 4|PQ|^2.$$

Sečtením předchozích dvou rovností dostaneme vztah

$$|AC|^2 + |BD|^2 = 2 \cdot \left(|MN|^2 + |PQ|^2\right).$$


C
Q
N
D
K
M
L
A
P
B

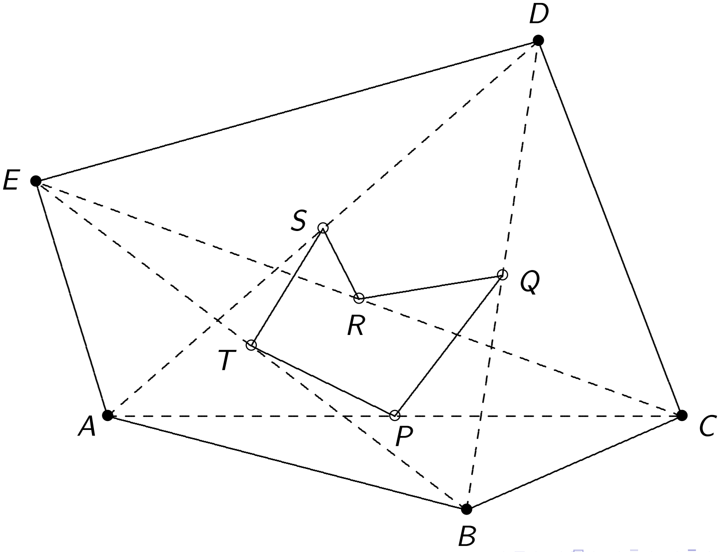
Pýthagorova věta pro pět bodů v eukleidovském prostoru.

Nechť A, B, C, D, E jsou body konečně dimenzionálního eukleidovského prostoru. Nechť P, Q, R, S, T jsou po řadě středy úseček AC, BD, CE, DA, EB. Potom je

$$3\left(|AB|^2+|BC|^2+|CD|^2+|DE|^2+|EA|^2\right)=$$

$$=|AC|^2+|BD|^2+|CE|^2+|DA|^2+|EB|^2+$$

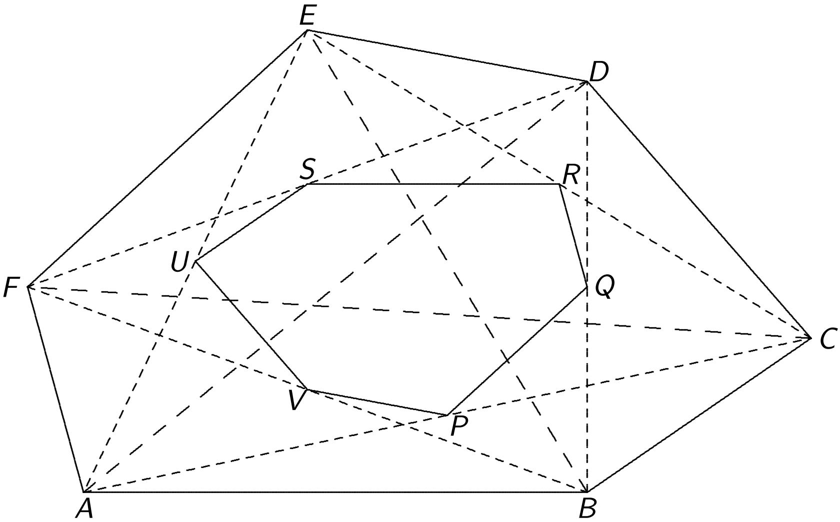
$$+4\left(|PQ|^2+|QR|^2+|RS|^2+|ST|^2+|TP|^2\right)$$


D
E
S
Q
R
T
A
P
C
B

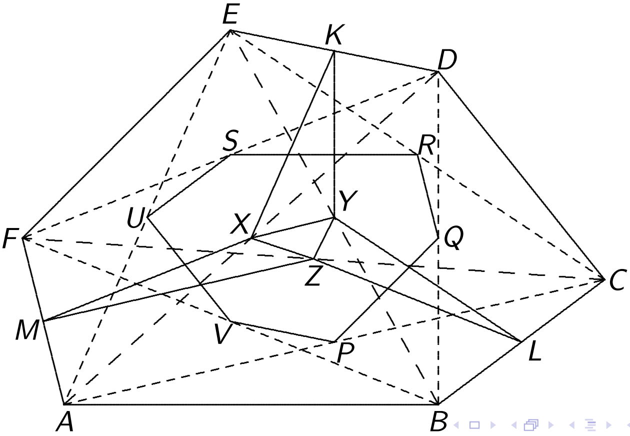
Pýthagorova věta pro šest bodů v eukleidovském prostoru.

Nechť A, B, C, D, E, F jsou body konečně dimenzionálního eukleidovského prostoru. Nechť P, Q, R, S, U, V jsou po řadě středy úseček AC, BD, CE, DF, EA, FB. Potom je

$$3\left(|AB|^2+|BC|^2+|CD|^2+|DE|^2+|EF|^2+|FA|^2\right)+$$
$$+2\left(|AD|^2+|BE|^2+|CF|^2\right) =$$
$$= 2\left(|AC|^2+|BD|^2+|CE|^2+|DF|^2+|EA|^2+|FB|^2\right)+$$
$$+4\left(|PQ|^2+|QR|^2+|RS|^2+|SU|^2+|UV|^2+|VP|^2\right).$$


E
D
S
R
U
F
Q
C
V
P
A
B

Věta. *Součet čtverců nad stranami „šestiúhelníku“ $ABCDEF$ je roven součtu čtverců nad stranami „šestiúhelníku“ $PQRSUV$ a trojúhelníků XYK, YZL a ZXM.* Přitom jsou body X, Y, Z, K, L, M středy úseček AD, BE, CF, DE, BC, FA.



- **Didaktické chvilky:**

  XI. Dokažte výše uvedená pýthagorejská tvrzení o pěti, resp. šesti bodech v eukleidovském prostoru konečné dimenze.

  XII. Pokuste se případně najít nějaké jiné vztahy mezi součty čtverců nad stranami a úhlopříčkami.

  XIII. Pouvažujte o jiných geometrických interpretacích uvedených rovností.

- Vrátíme se ke klasické Pýthagorově větě.

Gerbert z Aurillacu

- Gerbert z Aurillacu (930/950–1003) – Silvestr II. (999–1003)
  – legendy: čaroděj, spolčen s ďáblem ...; patrně byl otráven
  – udivoval mj. počtářskými výkony (uměl dělit velká čísla!)
  – jednak opravdu **uměl**, jednak **uměl ukazovat, že umí** ...
- Gerbertova exhibice s Pýthagorovou větou ve spisu *Geometria*

Příklad. Vypočtěme délku přepony pravoúhlého trojúhelníka, jehož odvěsny mají délky vyjádřené smíšenými čísly:

$6\,\frac{1}{3}$ (VI *et triens*),

$8\,\frac{5}{12}\,\frac{1}{36}$ (VIII *et quincunx et duella*).

Druhé mocniny těchto čísel jsou

$40\,\frac{1}{12}\,\frac{1}{36}$ (XL *et uncia et duella*)

$71\,\frac{3}{12}\,\frac{1}{24}\,\frac{1}{72}\,\frac{1}{576}\,\frac{2}{1728}\,\frac{1}{3\cdot 1728}$ (LXXI *quadrans, semuncia, sextula, obolus, duo siliquae et tercia siliquae*)

Součtem obou čtverců je

$111\,\frac{5}{12}\,\frac{1}{576}\,\frac{2}{1728}\,\frac{1}{3\cdot 1728}$ (CXI *quincunx, obolus, duo siliquae, et tercia unius siliquae*)

a odmocnina tohoto čísla se **snadno vypočte**:

$10\,\frac{6}{12}\,\frac{1}{24}\,\frac{1}{72}$ (X *semis, semuncia, sextula*).

Výpočet je správný, není však vysvětlen způsob výpočtu odmocniny.

- Kurt Vogel (1888–1985), proslulý německý historik matematiky a vědy, roku 1985 napsal:

  Die Rechnung ist richtig; wie Gerbert sie bekommen hat (insbesondere die Wurzel würde uns interessieren), erführt man nicht. Er mußte offenbar in einer Kopf- oder einer Nebenrechnung auf die kleinste Einheit zurückgehen.

  Ob aber wirklich, wie er dazu sagt, die Rechnungen einem Abacisten sehr leicht sind, kann man bezweifeln.

Gerbert podvedl i Kurta Vogela !!!

Omluvou mu byl jeho vysoký věk.

- **Gerbert odmocninu počítat nemusel! A nepočítal! Jen se vytahoval!**

- **Gerbert odmocninu počítat nemusel! A nepočítal! Jen se vytahoval!**

  Nejznámější pýthagorejskou trojicí je trojice $(3, 4, 5)$. Vynásobíme-li ji koeficientem

  $$2\,\frac{1}{9} = 2\,\frac{1}{12}\,\frac{1}{36}$$

  získáme strany pravoúhlého trojúhelníka z Gerbertova příkladu:

  $$6\,\frac{1}{3}, \qquad 8\,\frac{5}{12}\,\frac{1}{36}, \qquad 10\,\frac{6}{12}\,\frac{1}{24}\,\frac{1}{72}.$$

  Cynická poznámka:

- **Gerbert odmocninu počítat nemusel! A nepočítal! Jen se vytahoval!**

  Nejznámější pýthagorejskou trojicí je trojice $(3, 4, 5)$.

  Vynásobíme-li ji koeficientem

$$2\,\frac{1}{9} \;=\; 2\,\frac{1}{12}\,\frac{1}{36}$$

  získáme strany pravoúhlého trojúhelníka z Gerbertova příkladu:

$$6\,\frac{1}{3}, \qquad 8\,\frac{5}{12}\,\frac{1}{36}, \qquad 10\,\frac{6}{12}\,\frac{1}{24}\,\frac{1}{72}.$$

  Cynická poznámka: Člověk se nediví, že ho otrávili!

- **Didaktická chvilka:**

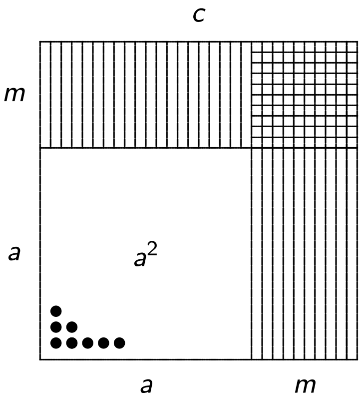
  XIV. Rozpomeňte se, že při tvorbě příkladů pro výuku vycházíte velmi často rovněž od výsledku.

  Gerbert to nedělal jinak.

Pýthagorejské trojice

- *Pýthagorejskou trojicí* (a, b, c) rozumíme trojici přirozených čísel a, b, c, pro která je
$$a^2 + b^2 = c^2.$$
Jsou-li čísla a, b, c nesoudělná, hovoříme o *primitivní pýthagorejské trojici.*
  - Nejznámější pýthagorejská trojice je $(3, 4, 5)$ (Egypt?).
  - Staří Řekové jich znali nekonečně mnoho.
  - Pýthagorův předpis: $(2k^2 + 2k,\ 2k + 1,\ 2k^2 + 2k + 1)$
  - Platónův předpis: $(k^2 - 1,\ 2k,\ k^2 + 1)$, kde $k \in \mathbb{N}$.
- Jak na tyto předpisy přišli?
S pomocí čtvercových figurálních čísel?

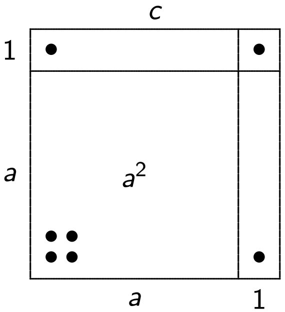
- Čtvercová čísla (kamínky sestavené do čtverce)
  c^2 kamínků ve velkém čtverci, a^2 kamínků v malém čtverci



$$= \; c^2 = a^2 + b^2$$

Kamínky umístěné na vyšrafované ploše (*gnómon* šířky m) lze přemístit a srovnat na čtverec b^2.

- Případ $c = a + 1$ – gnómon šířky 1.



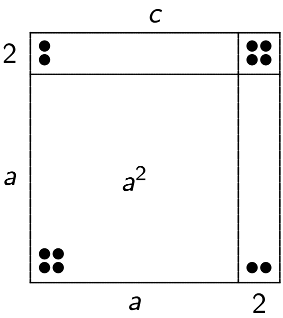
$= \; c^2 = a^2 + b^2$

Číslo b^2 je liché, tedy b je liché, tedy $b = 2k + 1$.

Potom $a = \frac{b^2-1}{2} = \frac{4k^2+4k}{2} = 2k^2 + 2k$ a $c = 2k^2 + 2k + 1$.

Trojice $(2k^2 + 2k,\; 2k + 1,\; 2k^2 + 2k + 1)$ (Pýthagorás)

- Případ $c = a + 2$ – gnómon šířky 2.



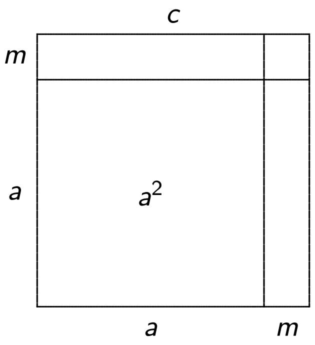
$= \quad c^2 = a^2 + b^2$

Číslo b^2 je sudé, tedy b je sudé, tedy $b = 2k$.

Potom $a = \frac{b^2-4}{4} = \frac{4k^2-4}{4} = k^2 - 1$ a $c = k^2 + 1$.

Trojice $(k^2 - 1,\ 2k,\ k^2 + 1)$ (Platón)

- Obecný případ $c = a + m$ – gnómon šířky m.



$$= c^2 = a^2 + b^2$$

Zřejmě je $$a = \frac{b^2 - m^2}{2m}, \quad c = \frac{b^2 + m^2}{2m}.$$

Vychází trojice $$\left(\frac{b^2 - m^2}{2m},\ b,\ \frac{b^2 + m^2}{2m} \right).$$

Její $2m$-násobek rovněž splňuje požadovaný vztah, máme tedy pýthagorejskou trojici

$$\left(b^2 - m^2,\ 2bm,\ b^2 + m^2 \right).$$

Požadujeme-li navíc, aby byla čísla b, m nesoudělná, získáváme popis všech primitivních pýthagorejských trojic.

Plimpton 322

- Mezopotámská tabulka *Plimpton 322*
  – z období 19./17. století př. Kr.
  – obsahuje patnáct pýthagorejských trojic

  Přesněji řečeno: na patnácti řádcích jsou uvedena čísla

$$c\,, \quad a\,, \quad \frac{c^2}{b^2}\,,$$

  přičemž (a, b, c) jsou pýthagorejské trojice.
  Navíc jsou seřazena podle velikosti čísla $\frac{c^2}{b^2}$.

  Existuje mnoho pokusů o výklad této tabulky.

Závěr

Závěr

Antickými branami

moudrosti k nám letí.

Závěr

Antickými branami

moudrosti k nám letí.

Tak si to piš!

(Čilá ruka, mozek ztuhlý!)

Závěr

Antickými branami
moudrosti k nám letí.

Tak si to piš!
(Čilá ruka, mozek ztuhlý!)

Trojúhelník pravoúhlý
je právě když
z čtverců nad jeho dvěma stranami
složí se čtverec nad stranou třetí.

Optimismus

Optimismus

Co bude dál, není jasné,

třeba to tu všechno zhasne.

Optimismus

Co bude dál, není jasné,

třeba to tu všechno zhasne.

Když se zimou třesete,

dohřeje vás RVP!

Děkuji za pozornost!

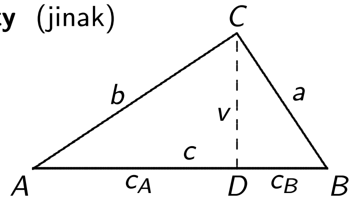
Děkuji za pozornost!

A hlavně za květinové dary!

Apendix

- **Obrácení Pýthagorovy věty** (jinak)

Nechť platí $a^2 + b^2 = c^2$.



Pýthagorova věta: $a^2 = v^2 + c_B^2$, $b^2 = v^2 + (c - c_B)^2$,

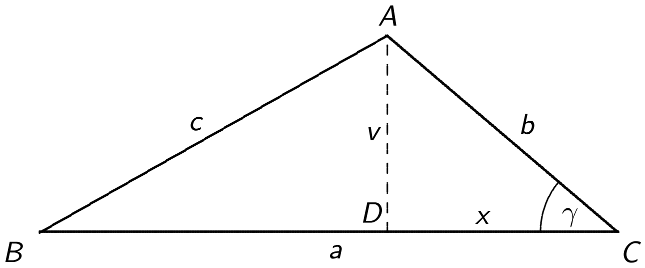
tedy $a^2 + b^2 = 2v^2 + c^2 + 2c_B^2 - 2c \cdot c_B$.

Podle předpokladu je tedy

$$v^2 = c \cdot c_B - c_B^2 = c_A \cdot c_B, \quad \text{neboli} \quad \frac{v}{c_B} = \frac{c_A}{v}.$$

Trojúhelníky ADC a CDB jsou proto podobné a úhel při vrcholu C je pravý.

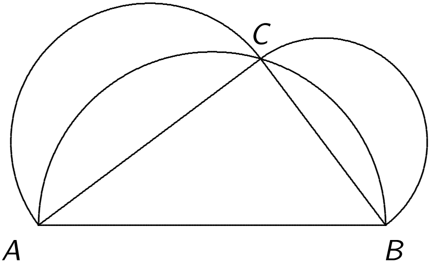
Důkaz Kosinové věty pomocí Pýthagorovy věty



$$c^2 = v^2 + (a - x)^2 = b^2 - x^2 + (a - x)^2 = a^2 + b^2 - 2ax =$$

$$= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

- **Hippokratovy měsíčky** – Hippokrates z Chiu (5. stol. př. Kr.)



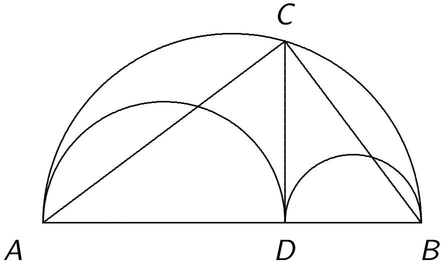
Uvažujme pravoúhlý trojúhelník ABC a polokružnice nad jeho stranami, které vymezují dva *měsíčky*. Dokažte:

Obsah dvou měsíčků je roven obsahu trojúhelníku ABC.

1. Výpočtem pomocí vzorců.

2. Bez výpočtu, úvahou pomocí Pýthagorovy věty.

- **Archimédův arbelos** – Archimédés ze Syrákús (287?–212)



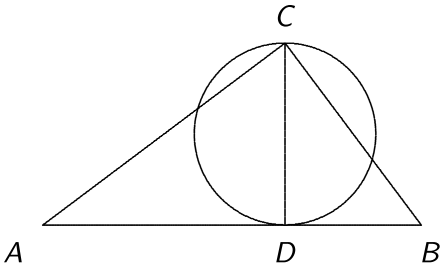
Uvažujme pravoúhlý trojúhelník ABC a tři polokružnice nad úsečkami AB, AD, DB vymezující útvar *arbelos*. Dokažte:

Obsah útvaru arbelos je roven obsahu kruhu s průměrem CD.

1. Výpočtem pomocí vzorců.

2. Bez výpočtu, úvahou pomocí Pýthagorovy věty.

- **Archimédův arbelos** – Archimédés ze Syrákús (287?–212)



Uvažujme pravoúhlý trojúhelník ABC a tři polokružnice nad úsečkami AB, AD, DB vymezující útvar *arbelos*. Dokažte:

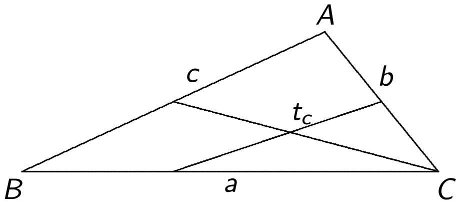
Obsah útvaru arbelos je roven obsahu kruhu s průměrem CD.

1. Výpočtem pomocí vzorců.

2. Bez výpočtu, úvahou pomocí Pýthagorovy věty.

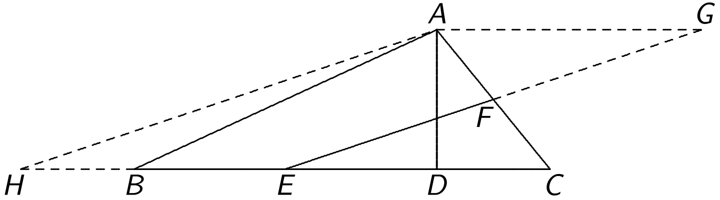
Apolloniova věta. *Pro těžnici t_c z vrcholu C trojúhelníku ABC je*

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2}c^2 + 2t_c^2.$$



Dokažte!

Věta. *V trojúhelníku ABC označme písmenem D patu výšky spuštěné z vrcholu A na přímku BC. Nechť E je střed úsečky BD a F střed úsečky AC. Potom* $|AD|^2 = 4|EF|^2 - |BC|^2$.



Dokažte!

Literatura

J. Bečvář, V. Dlab: *Bohatství pýthagorejských tvrzení včetně Pýthagorovy věty pro čtyři a více bodů v prostoru*, PMFA 62(2017), 283–294

J. Bečvář a kol.: *Matematika ve středověké Evropě*, edice Dějiny matematiky 19, Prometheus, Praha, 2001, 445 stran

J. Bečvář, M. Bečvářová: *200 let české učebnice geometrie Josefa Vojtěcha Sedláčka*, PMFA 66(2021), 238–265

M. Bečvářová, J. Veselý: *Plimpton 322 – přelomový objev?*, PMFA 62(2017), 254–263

K. Lerl: *K t. zv. Bolzanovu důkazu Pythagorovy věty*, ČPMF 67(1937–38), D 295

Porfyrios, Jamblich, Z. Kratochvíl, D. Ž. Bor: *Pýthagorás ze Samu*, Trigon, Praha, 1999

A. Slavík: *Pýthagorejské trojúhelníky a jiné úlohy*, Rozvíjení matematických talentů na středních školách III., MatfyzPress, Praha, 2021, 49–54

K. Vogel: *Gerbert von Aurillac als Mathematiker*, Acta Historica Leopoldina (Halle) 16(1985), 9–23

Webové stránky

- **Mezinárodní konference Historie matematiky:**

https://www.fd.cvut.cz/personal/becvamar/konference/index.html

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/ becvar/40konferenciHM.pdf

- **Semináře z historie matematiky pro vyučující na středních školách:**

https://www.fd.cvut.cz/personal/becvamar/seminar_ss/index.html

- **Edice Dějiny matematiky:**

https://www.fd.cvut.cz/personal/becvamar/Edice/Edice.htm

https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/400597

- **Univerzita třetího věku na MFF UK:**

https://www.mff.cuni.cz/cs/studenti/celozivotni-vzdelavani/univerzita-tretiho-veku

- **Milujeme matematiku:**

https://www.milujemematematiku.cz/